Chapitre 24

Complément d'analyse

I Dérivées successives

1) Définitions, exemples

a) Dérivée n-ème

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit la dérivée n-ième de f (ou "dérivée d'ordre n") en un point $x \in I$, notée $f^{(n)}(x)$, de la façon suivante :

(i) $f^{(0)}(x) = f(x)$

(ii) Pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable en x si sa fonction dérivée d'ordre $n-1$ ième est dérivable en x et on pose $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

b) Exemples :

$f : x \mapsto e^x$:

$f : x \to \sin x$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors $P^{(n+1)}(x) =$ et $P^n(x) =$

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

a) Définitions

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I ssi f est dérivable n fois sur I et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples :

1. les fonctions cos, sin, exp sont toutes de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elles sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Étudions la classe de la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A noter : *Régularité*

On appelle "régularité" d'une fonction toutes les informations relatives à sa dérivabilité et sa continuité. Intuitivement, la meilleure régularité pour une fonction, c'est être de classe $\mathcal{C}^\infty$: cela se traduit par des fonctions dont la courbe représentative est particulièrement "lisse". Au contraire, une courbe qui présente des "pics" ou des modifications brusques, des irrégularités, correspond à une fonction qui n'a pas peut-être pas ses dérivées existantes ou continues.

Retour sur l'exemple précédent :
Cette notion reste difficile à appréhender car la deuxième fonction de l'exemple précédent a un graphe très "lisse" en apparence...

b) Opérations et fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Comme pour la continuité et la dérivabilité et avec le même genre de démonstrations, on a :

Propriété 1

1. *La somme, le produit, les combinaisons linéaires de fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^n$*
2. *Si f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathcal{C}^n$ en tout point de I où g ne s'annule pas.*
3. *Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$ avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

En outre, on dispose d'une formule parfois utile pour le produit :

Proposition 1 (*Formule de Leibniz*)

si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

▷ *Preuve* : Même genre de preuve que le Binôme de Newton, comme on peut s'y attendre ! ◁

3) Formules de Taylor

a) Formule de Taylor avec reste intégrale

Dans le chapitre sur la dérivation, on a vu le théorème des accroissements finis :
si f est dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$, alors il existe c in $]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

On peut en fait généraliser cette formule :

Théorème 1 (*Formule de Taylor avec reste intégrale*)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et soient a, b deux réels de I. Alors :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n$$

où R_n est appelé "reste intégral" et vaut :

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Autrement écrit :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

▷ *Preuve* :

◁

Au secours ! *Quelle utilisation ?*

Cette formule, très impressionnante, s'utilise fréquemment dans le cas $a = 0$ et $b = x$, qui devient donc une variable :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_n$$

La partie avant le reste est un polynôme, appelé polynôme de Taylor à l'ordre n, qui devient une approximation de la fonction.

Le reste intégral est l'erreur commise lors de cette approximation.

b) Inégalité de Taylor Lagrange

Toujours dans cette idée d'approximation, en majorant la dérivée $(n+1)$-ième dans le reste intégral, on obtient la relation suivante :

Théorème 2 (*Inégalité de Taylor Lagrange*)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et soient a, b deux réels de I. Soit M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I. Alors :

$$\left| f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette inégalité est très efficace pour les fonctions qu'on sait bornées (par exemple en trigonométrie)....

c) La série exponentielle

Proposition 2

soit $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

▷ *Preuve :*

◁

II Développements limités

1) Rappel sur la négligeabilité

a) Définition :

Définition 3

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f est négligeable devant $x \mapsto x^n$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$, ou de manière équivalente, si et seulement si il existe une fonction ε avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tel que $f(x) = \varepsilon(x)x^n$.
On note alors $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$.

Proposition 3

Les plus fortes puissantes sont négligeables en 0, c'est à dire :
Pour tous entiers relatifs p et n avec $p < n$, $x^n \underset{0}{=} o(x^p)$.
Pour tout réels α et β avec $\alpha < \beta$, $x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta)$.

Exemples :
$x^4 \underset{0}{=} x^2$, $x \underset{0}{=} \sqrt{x}$, etc....

b) Propriétés :

Propriété 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 telles que $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$ et $g(x) \underset{0}{=} o(x^n)$. Alors $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{0}{=} o(x^n)$ pour tout λ et μ réels.

Autrement dit, l'ensemble des fonctions négligeables devant une puissance fixées de n est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions....

En outre, on peut substituer une puissance par une autre :

Propriété 3

$\forall p \in \mathbb{N}$, *si* $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$, *alors* $f(x^p) \underset{0}{=} o(x^{np})$

▷ *Preuve :* C'est une composition de limites.

◁

Propriété 4 (*Pas d'importance des scalaires*)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \underset{0}{=} o(\lambda x^n) \Leftrightarrow f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$

▷ *Preuve :*

◁

c) Une notation pratique :

Définition 4

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. On note $f(x) \underset{0}{=} g(x) + o(x^n)$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{0}{=} o(x^n)$

Exemple :
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x} = 0$, donc $\sin(x) - x \underset{0}{=} o(x)$, donc $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

2) Développements limités

a) Définition

Définition 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $0 \in I$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (en abrégé : $DL_n(0)$) si et seulement si $\exists a_0, a_1, \ldots, a_n$ réels tels que

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n) \\ &\underset{0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n) \end{aligned}$$

Le terme $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ est appelé "partie régulière d'ordre n" de f.

Exemples :
Lors du chapitre sur les limites et les équivalents, puis de dérivation, on déjà obtenu quelques développements limités :

— $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ donc sin admet un $DL_1(0)$, de partie régulière x.

— De même, $\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$, donc $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}x+o(x)$

Un premier "vrai" calcul de DL

Soit $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)}$$

En remplaçant x par $-x$ et étant donné qu'un $o(x^n)$ est également un $o((-x)^n)$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)}$$

b) Conséquence sur la régularité, interprétation

Continuité

Si f est continue en 0, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, autrement dit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-f(0)=0$.

En posant $\varepsilon(x)=f(x)-f(0)$, on a donc $f(x)=f(0)+x^0\varepsilon(x) \underset{0}{=} f(0)+o(x^0)$. Ainsi

Proposition 4

f est continue en 0 si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 0 en 0. Le coefficient a_0 est alors $f(0)$

Dérivabilité :

Proposition 5

f est dérivable en 0 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \underset{0}{=} f(0)+\ell x+o(x)$$

c'est à dire si et seulement si

$$f \text{ admet un } DL_1(0)$$

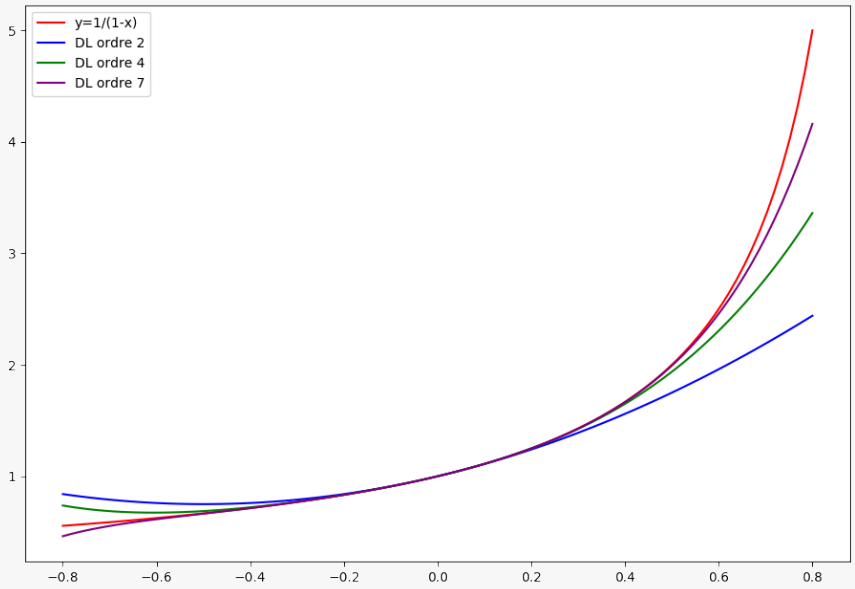
Les coefficients de la partie régulière sont alors $a_0=f(0)$ et $a_1=f'(0)$.

▷ *Preuve* : c'est la définition de la dérivée :

◁

A noter : *Interprétation :*

Avoir un DL à l'ordre 1 traduit la dérivabilité, c'est à dire le fait que la courbe de f admet une tangente, c'est à dire que la courbe de f est "presque" une droite (ce que traduit le $o(x)$).
Un développement limité à l'ordre n permet d'aller plus loin : il signifie qu'une fonction f est, au voisinage du point considéré, "presque" un polynôme. Plus l'ordre est grand, plus on est précis.



L'intérêt, on va le voir, est très grand : les polynômes sont les fonctions les plus simples à manipuler.

c) DL en un point autre que 0

Il est souvent plus pratique de regarder des DL en 0, qui sont d'allure assez "simple", mais on peut définir les DL en n'importe quel point $a \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

On note en abrégé : $DL_n(a)$.

Proposition 6

f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$
Ainsi, on peut calculer le $DL_n(a)$ de f en faisant le changement de variable $x = a + h$.

▷ *Preuve* : c'est un "bête" changement de variable... ◁

Exemple :

On veut faire le $DL_n(1)$ de $\dfrac{1}{x}$.

Danger ! *Ne pas développer !*
Quand on a un DL ailleurs qu'en 0, on ne développe JAMAIS les termes et on laisse toujours sous la forme

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

3) Existence de DL

a) Formule de Taylor-Young

Théorème 3 (*Formule de Taylor-Young*)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I avec $0 \in I$. Alors f admet un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

La partie régulière de ce DL, $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est appelé "polynôme de Taylor de f à l'ordre n en 0".

▷ *Preuve :* admis. S'obtient à partir de la formule de Taylor avec reste intégrale. ◁

Remarques :

1. On peut donner une version en tout point a de Taylor Young, en pratique peu utile vu qu'on se ramène facilement en 0.

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

2. La formule de T-Y permet ainsi de calculer des DL à n'importe quel ordre des fonctions usuelles.... au prix de calcul pas forcément sympas...
3. Ce théorème permet aussi d'affirmer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet un développement limité à l'ordre que l'on veut !

b) Exemples à connaitre : exponentielle et trigonométrie

Exponentielle
Soit $f : x \mapsto e^x$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc on peut utiliser TY à n'importe quel ordre. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, on a $f^{(n)}(0) = 1$, d'où le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant :

$$\boxed{e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

Logarithme :

Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. On a $f(0) = 0$, puis $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

En recalant tout ça, on obtient :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

Sinus et cosinus
Soit maintenant $f : x \mapsto \sin(x)$.

$$\boxed{\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})}$$

De la même façon, on montre que

$$\boxed{\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$

c) Exemple à connaitre : puissances (et racines)

Soit $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et donc pour $x > -1$, on peut calculer $f'(x)$.
On obtient $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, donc $f'(0) = \alpha$, puis $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, donc $f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1)$ etc...
D'où, par récurrence $f^{(n)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}_{n \text{ termes}}(1+x)^{\alpha-n}$
et donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$. Ce qui donne :

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Remarque :
Si α est un entier $\geq n$, on a $\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \binom{\alpha}{2}, \ldots, \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$
Ainsi, la partie régulière d'ordre n de $(1+x)^\alpha$ est le début du binôme de Newton : on garde les n premiers termes de $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k 1^{\alpha-k}$.

Exemple :
Si on veut un $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$, c'est le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et on a

d'où

$$\boxed{\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$$

4) Calcul avec les DLs

a) Unicité et troncature

Théorème 4

Si f admet un $DL_n(a)$, alors celui-ci est unique.

▷ *Preuve* : On fait la preuve au voisinage de 0 (on peut toujours s'y ramener) :

◁

Conséquence : les DLs obtenus précédemment sont les seuls possibles, et on peut parler "DU" développement limité à l'ordre n d'une fonction, pas seulement "d'un"...
De plus il n'est pas nécessaire de tout recalculer si on est allé trop loin :

Proposition 7

Si f admet un $DL_n(0)$ pour un n fixé, alors f admet un $DL_p(0)$ pour tout p plus petit que n obtenu en "tronquant" la partie régulière du $DL_n(0)$ aux termes de degré plus petit que p.

Ainsi, si $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$ (DL à l'ordre n), le $DL_p(0)$ est donné par
$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p + o(x^p)$ (on s'arrête au p-ième terme)

Remarque : E fait on rentre tous les termes de degré supérieur à p dans le $o(x^p)$!
Par exemple :
$Tr_2(1 + x^2 + 3x^3 + 5x^4) = 1 + x^2$.

Exemple : On a un DL à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Donc à l'ordre 2, cela donne

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

et à l'ordre 1, c'est

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

De même, $\sin x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$ donc à l'ordre 2 on a $\sin x \underset{0}{=} x + o(x^2)$.

b) Combinaisons linéaires

On a vu que si $f = o(x^n)$ et $h = o(x^n)$, alors $\lambda f + \mu h = o(x^n)$. Autrement dit, on peut additionner et faire des combinaisons linéaires de "petits o" si ce sont les petits o de la même chose. On a donc directement :

Proposition 8

Soient f et g deux fonctions admettant un $DL_n(a)$. Soit λ et μ deux réels.
Soient P_f la partie régulière de f et P_g la partie régulière de g, alors
$\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $\lambda P_f + \mu P_g$.

Exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donner son $DL_4(0)$:

c) Produit

Proposition 9

Soient f et g admettant un $DL_n(0)$, de partie régulière respective P_f et P_g.
Alors fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est donnée par le produit $P_f(x) \times P_g(x)$ dans lequel on n'a gardé que les monomes de degré inférieur à n.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Donner le $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin(x)e^x$:

d) Cas particulier : produit par des puissances de x

Pour les DL en 0, on dispose d'un résultat assez pratique

Proposition 10

Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0)$, et $p \in \mathbb{N}$, alors $x^p f(x)$ admet un $DL_{n+p}(0)$ de partie régulière $x^p P_f$.

▷ *Preuve* : si $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ alors

$$x^p f(x) \underset{0}{=} a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + a_2 x^{p+2} + \ldots + a_n x^{n+p} + x^{n+p}\varepsilon(x)$$

d'où $x^p f(x) = x^p P_f(x) + o(x^{n+p})$ ◁

Exemple :
Donner le $DL_5(0)$ de $x^3\sqrt{1+x}$.

III Quelques applications des développements limités

1) DL et équivalents

Théorème 5

Soit f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière non nulle. Alors f est équivalente au voisinage de 0 au monome non nul de plus bas degré de la partie régulière

▷ *Preuve* : On a $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ avec au moins un des $a_i \neq 0$. Soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$, alors pour tout $k > p$, $a_k x^k = o(x^p)$. Ainsi,

$$f(x) = a_p x^p + o(x^p) = a_p x^p + x^p \varepsilon(x) = a_p x^p \underbrace{(1 + \frac{\varepsilon(x)}{a_p})}_{\underset{x\to 0}{\to} 1}$$

$$\text{Donc } f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$$

◁

2) Etude locale

a) Tangente

Si f admet un $DL_1(a)$, on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$
Ainsi, le début du développement limité nous donne la tangente en a à la courbe de f.
Si on a un développement limité d'ordre supérieur, on va pouvoir récupérer des informations supplémentaires, comme la position par rapport à cette tangente.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. On cherche sa tangente en 0.

b) Extremum

Proposition 11

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$.
On suppose que a est un point critique de f (i.e. $f'(a) = 0$)
Alors

1. *Si $f''(a) > 0$, $f(a)$ est un minimum local,*
2. *si $f''(a) < 0$, alors $f(a)$ est un maximum local,*
3. *si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire.*

▷ *Preuve :* On suppose que $a = 0$ (sinon, on s'y ramène en posant $\tilde{f}(x) = f(x-a)$)
D'après la formule de Taylor, on a :

$$f(x) = f(0) + f''(0)x^2 + o(x^2)$$

Donc si $f''(0) \neq 0$, $f(x) - f(0) \sim f''(0)x^2$, donc du signe de $f''(0)$ au voisinage de 0.
D'où la conclusion.

◁

IV Fonctions convexes

1) Définition, graphique, inégalité de convexité

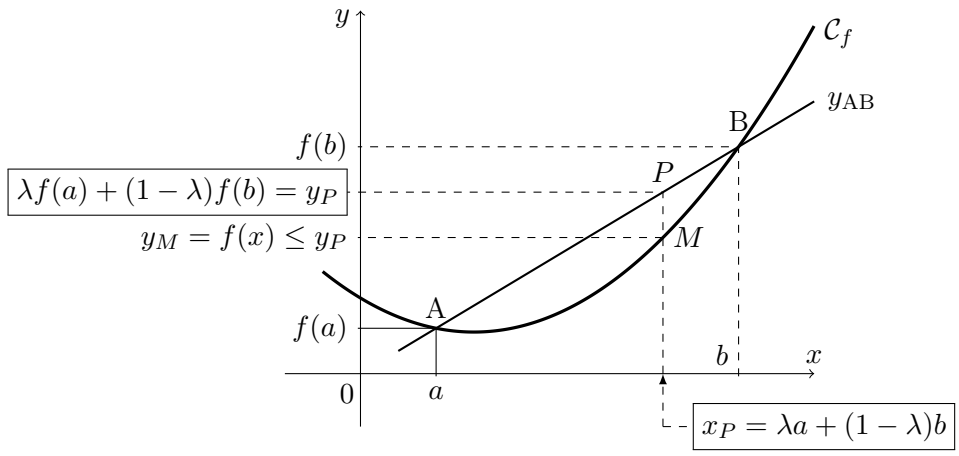
Définition 6

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, une application.
*On dit que f est **convexe** sur I si et seulement si :*

$$\forall (a, b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \ \leq\ \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

*On dit que f est **concave** sur I si et ssi $-f$ est convexe sur I.*
(L'inégalité précédente est alors dans l'autre sens)

Graphiquement, cela signifie ceci :



Autrement dit :

Propriété 5 (*Interprétation graphique*)

Soit $a < b$ et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points de $\mathcal{C}_f$.
Si f est convexe alors, entre a et b, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (AB).

On dit également que si f est convexe sur I, alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses cordes (une corde est un segment reliant deux points de la courbe).

Exemples :

1. Les fonctions affines ($x \mapsto ax + b$) sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction exp est
4. la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est

2) Lien entre convexité et dérivée

a) Dérivée et dérivée seconde

Proposition 12 (*Caractérisation pratique*)

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. On a :
f convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ croissante sur I.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. On a :
f convexe sur $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I.

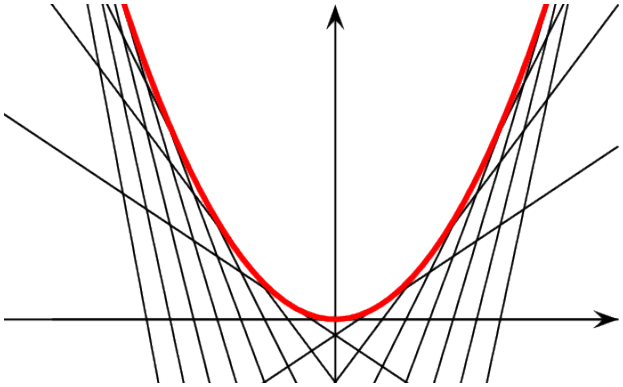
▷ *Preuve :*

◁

Exemples :

Proposition 13 (*Interprétation graphique*)

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. On a :
f convexe sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur I.



b) Recherche d'extremum

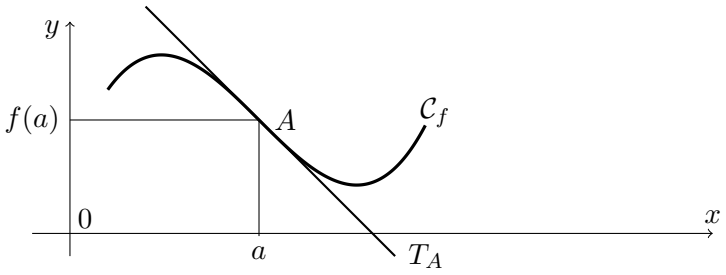
Proposition 14

- *Si f est convexe sur un intervalle I ouvert, alors f admet un minimum global dans I si et seulement si $\exists a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.*
- *Si f est concave sur un intervalle I ouvert, alors f admet un maximum global dans I si et seulement si $\exists a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.*

3) Point d'inflexion

Définition 7

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et $a \in I$.
*On dit que $A(a,\ f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si f'' s'annule en changeant de signe en a.*



Exemples :

V Apprendice : compléments sur les DL - Hors programme

Remarque : Ces résultats sont à la limite du programme, on ne le verra pas en classe mais si vous visez les meilleures écoles, ça vaut le coup d'y jeter un oeil (ou par pure curiosité si les DLs vous plaisent).

1) Opérations "élaborées"

a) Composition :

Théorème 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière $P_f(x)$.
Soit $g : J \to \mathbb{R}$ (avec $f(I) \subset J$) admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière $P_g(x)$.
Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, alors $g(f(x))$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière la composée des parties régulières dont on a gardé que les monômes de degrés plus petits que n.
Autrement dit : $g(f(x)) \underset{0}{=} Tr_n(P_g(P_f(x))) + o(x^n)$

▷ *Preuve :* (idée) On a $g(x) = P_g(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ donc $g(f(x)) = P_g(f(x)) + (f(x))^n\varepsilon_1(f(x))$.
Comme f admet un DL, f est continue en 0 avec $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, donc $\varepsilon_1(f(x)) \to 0$ quand $x \to 0$.
Et comme $f(0) = 0$, on a en outre que $f(x) = P_f(x) + o(x^n)$ avec $P_f(0) = 0$, c'est à dire $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$ (pas de terme constant puisque la limite en 0 est 0), donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme de plus bas degré dans la partie régulière de $f(x)^k$ est de degré k (forme $\alpha_k x^k$).
On remplace dans l'expression de g, on développe et on regroupe tous les termes de degré inférieur ou égal à n d'un côté, et tous les ceux de degré supérieur stricte à n de l'autre. Ces derniers sont négligeables, et le terme $(f(x))^n\varepsilon_1(f(x))$ est de la forme $x^n(\varepsilon_2(x))$ avec $\varepsilon_2(x) \to 0$.
Au final, on a la propriété voulue. ◁

Remarque :
Comme pour le produit, la composée d'une puissance de x est simple :

Propriété 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière $P_f(x)$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors $f(x^p)$ admet un $DL_{np}(0)$ de partie régulière $P_f(x^p)$

▷ *Preuve :* Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \varepsilon(x)x^n$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$, alors

$$f(x^p) = \underbrace{a_0 + a_1x^p + a_2x^{2p} + \ldots + a_nx^{np}}_{=P_f(x^p)} + \underbrace{\varepsilon(x^p)}_{\to_{x\to 0}0} x^{np}$$

Donc f admet un $DL_{np}(0)$ de partie régulière $P_f(x^p)$ ◁

Exemples :

1. On veut $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
   On sait que $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, donc $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ d'après la propriété précédente, puis par troncature : $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + o(x^3)$
2. $DL_3(0)$ de $\sin(\sin(x))$:
   On a $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, et $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$. On peut composer et on a donc
   $$\sin(\sin(x)) = Tr_3\left((x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3\right)$$
   d'où $\sin(\sin(x)) = x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

3. $DL_3(0)$ de $e^{\cos x}$
Problème : $\cos x$ ne tend pas vers 0 ! On ne peux pas composer directement.
On écrit $e^{\cos x} = e^{1+(\cos(x)-1)} = e^1 e^{\cos(x)-1}$.
Cette fois $\cos(x) - 1 \to 0$ et on peut composer :
$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $\cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$
On compose, et $e^{\cos(x)-1}$ a pour partie régulière à l'ordre 3

$$PR = Tr_3(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + \ldots ...) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

(tout le reste est de degré plus grand que 3 : pas la peine de se fatiguer...) Enfin,

$$e^{\cos x} \underset{0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3)$$

b) "Quotient"

Le quotient de deux fonctions admettant un DL n'admet pas forcément toujours un DL.
Néanmoins, si f et g admettent un $DL_n(0)$ et que $g(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$.
(mais ce n'est pas le seul cas ou ça marche...)
Dans ce cas, la technique est la suivante :

1ere étape : On écrit $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$.

2eme étape : Avec $a = g(0)$, On écrit

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a + g(x) - a}$$

puis on factorise par a pour avoir :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 + u(x)} \text{ avec } u(x) = \frac{g(x) - a}{a}$$

3eme étape : Cette fois $u(x) \to 0$. On cherche son $DL_n(0)$ et on compose avec celui de $\frac{1}{1+x}$. On obtient ainsi le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{g(x)}$.

4eme étape : On calcule le DL_n de f et on fait le produit avec le DL_n de $\frac{1}{g(x)}$.

Exemple :
Calcul du $DL_5(0)$ de $\tan x$.
On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin(x) \times \frac{1}{\cos x}$
$\cos(0) = 1$, donc on écrit $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + (\cos x - 1)}$. Pas besoin de factoriser ici.
On a $\cos x - 1 = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $\cos 0 - 1 = 0$ donc on peut composer avec le $DL_5(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ qui est :
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$.
D'où $\frac{1}{1 + (\cos x - 1)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)$ (les puissances suivantes dépassent 5...) et on a

$$\frac{1}{\cos x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

De plus, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
D'où $\tan x \underset{0}{=} Tr_5\left((x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24})\right) + o(x^5) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

Cas particulier : division par une puissance de x
Comme pour le produit et la composition de DL, on dispose d'un résultat pratique quand on divise par des puissances de x :

Propriété 7

Si f admet un $DL_n(0)$ de la forme $f(x) = a_p x^p + \dots a_n x^n + o(x^n)$ (c'est à dire : les p premiers coeffs sont nuls), alors $\dfrac{f(x)}{x^p} = a_p + \dots a_n x^{n-p} + o(x^{n-p})$: on obtient un $DL_{n-p}(0)$.

Exemple : $DL_4(0)$ de $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$.
On divise par x^2 : l'ordre va diminuer de 2. On va donc partir d'un DL à l'ordre 6 de $\cos(x)-1$.
Comme $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$, on a

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + o(x^4)$$

c) forme indéterminée 0 sur 0 :

Dernier cas où un quotient de DL peut se faire, c'est quand on obtient des choses en "0 sur 0". Il n'y a pas toujours de DL dans ces cas là...
Le principe est d'écrire les deux DLs et de simplifier "comme si on avait des fonctions normales".... On verra cela sur des exemples en TD car de nombreuses configurations sont possibles.

2) Intégration des développements limités

a) Théorème :

Théorème 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un $DL_n(0)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Soit F une primitive de f. Alors F admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant la partie régulière de f et en ajoutant $F(0)$, ie. :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

▷ *Preuve* : On commence par écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
Comme f est continue, ε l'est également donc on pourra l'intégrer.
On a $F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \underbrace{\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt}_{=u(x)}$ Il reste à montrer que $u(x) = o(x^{n+1})$.
Pour cela, comme $\varepsilon_1 \to 0$, pour tout ν, il existe η, pour $|x| \le \eta$, $|\varepsilon(x)| \le \nu$ (par définition de la limite)
Alors pour $|x| \le \eta$ et $x > 0$ on a

$$\left|\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt\right| \le \int_0^x |t^n \varepsilon(t)|dt \le \nu \int_0^x t^n dt = \nu \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \nu x^{n+1}$$

On peut montrer la même relation pour $|x| \le \eta$ et $x < 0$ (en changeant l'ordre des bornes dans l'intégrale) et il vient :

$$\forall \nu > 0, \exists \eta / \text{ si } |x| \le \eta, \text{ alors } \frac{\left|\int_0^x t^n \varepsilon(t)dt\right|}{x^{n+1}} \le \nu$$

Ce qui signifie que $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{x^{n+1}} = 0$ donc que $u(x) = o(x^{n+1})$ (ouf !)

◁

b) Exemple d'application

Logarithme :
⚠, ln n'a pas de $DL_n(0)$ (puisqu'elle n'y est même pas continue...), mais en revanche on a : $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$:
Comme $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$, on obtient par intégration (avec $\ln(1+0) = \ln 1 = 0$) que :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

Par substitution, on a également :

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

Trigonométrie réciproque :
Les dérivées des fonctions trigonométrique réciproques sont assez simples, et il est donc facile d'avoir un DL de ces fonctions.
Par exemple pour arctan en 0 à l'ordre 7, on a :
On a $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$ (par composition de x^2 avec $\frac{1}{1+x}$).
A nouveau, il n'y a rien a ajouter à la primitive car $\arctan(0) = 0$ et on a Donc

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

On peut également calculer ceux de arccos et arcsin de la même façon (en faisant attention avec $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$...)

c) Piège : DERIVATION DE DL INTERDITE

Même si c'est tentant, ce n'est pas parce qu'une fonction dérivable admet un DL que sa dérivée admet un DL donné par la dérivée de celui-ci.
En fait, il est même possible que la dérivée n'admette pas de DL !
Exemple : soit $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x^2}$
On a $f(x) = 0 + x^2 \underbrace{(x \sin\frac{1}{x^2})}_{\to 0}$ donc $f(x) \underset{0}{=} 0 + o(x^2)$
Ainsi f admet un $DL_2(0)$.
Remarquons qu'elle admet donc un $DL_1(0)$ ce qui fait qu'elle est dérivable en 0 avec $f'(0)$ qui est le coefficient d'ordre 1, donc $f'(0) = 0$. (ce n'est a priori pas évident quand on voit la fonction...)
On calcule $f'(x)$ pour $x \neq 0$, et on trouve

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2x^3 \frac{1}{x^3}\cos(\frac{1}{x^2}) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 3\cos(\frac{1}{x^2})$$

Ainsi $f'(x)$ n'a pas de limite en 0 ! Elle n'est donc pas continue en 0 et donc n'admet pas de développement limité...
A retenir : On ne dérive pas le DL d'une fonction pour avoir le DL de la dérivée, à moins de savoir à l'avance que la dérivée admet un DL (par exemple si la fonction de base est de classe $\mathcal{C}^\infty$)